HIGHER SPHERICAL POLYNOMIALS : JOINT WORK WITH DON ZAGIER (Automorphic Forms and Related Zeta Functions)

伊吹山, 知義

数理解析研究所講究録
第 1934 巻 2015 年 123-137

HIGHER SPHERICAL POLYNOMIALS (JOINT WORK WITH DON ZAGIER)

伊吹山知義 (TOMOYOSHI IBUKIYAMA)
大阪大学 (OSAKA UNIVERSITY)

ここで述べる研究は一種の特殊関数論で、その元々の動機は保型形式論から来ているのではあるが、実際上、この理論は、動機とは全く独立に、それ独自の面白さから研究されたものである。よってこれは整数論でも保型形式論でもなく、全く新しい多変数特殊多項式系の理論であり、その一部に古典的な Gegenbauer 多項式系を含む。内容は古典的な表現論と関係がないわけではないが、実際には表現論の流用で済む議論はほとんどなく、大部分独自の主張と証明から成り立っている。

研究集会では、この理論に関するザギエとの共著論文 Higher Spherical Polynomials [8] の内容を大雑把に紹介した。この論文はすでに完成しており、原稿としては９７ページある (cf. [8])。この詳しい要約を講演内容にそってここに記述することには意味がないと思われる。そこで、講演内容とはややずれるかもしれないが、ややインフォーマルな形式で、なるべく簡単にその数学的な進展のポイントがわかるようにして、数学的な内容を、歴史も振り返りつつ補完してみたい。論文はかなりわかりやすく書いているつもりなので、興味を持たれた方は是非原論文を参照していただければと思う。ここでは細かい部分に触れることはできないし、そもそも９７ページある論文を中途半端に要約することは無用の誤解を与える恐れがなきにしもあらず、という気もするが、この拙文が多少は感覚的な把握に役立つことを願って、書いてみる。万一、ここに書いてあることがつまらないと思われた方も是非プレプリントも参照して、詳しい数学を眺めた上で判断していただければ幸いである。

1. 動機

１９９０年の秋ごろ、ザギエ氏が九大の客員教授であった折に、私に次のような問題を説明した。ウェイト k の３次ジーゲル保型形式 $F(Z)$ があるとする。これに対する何らかの (正則な) 微分作用素 $\mathbb{D}$ を考える。$\mathbb{D}(F)$ を対角成分に制限したときに、つまり

$$(\mathbb{D}F)\begin{pmatrix} z_{11} & 0 & 0 \\ 0 & z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & z_{33} \end{pmatrix}$$

本研究は日本学術振興会科学研究費基盤研究 (A)25247001 によって援助されています。.

を考えた時に、これが各 z_{ii} について、みな適当なウェイトの保型形式になっているのはどのような場合か？このような $\mathbb{D}$ を具体的に構成せよ。

当時 S. Kudla たちは、 modular curve C に対して、$C \times C \times C$（複素次元は 3 だが、数論的次元は 4）の中間次元サイクルの算術交点理論について、Gross Zagier の理論の類似のようなことができるのではないか、これは 3 重積 L 関数と関係があるのではないか、という問題を考えており、微分作用素の話がこれに応用できるのではないかということで Zagier が微分作用素の部分を考えたとのことである。当時、ザギエは元のウェイト $k=2$ の場合については結果を持っていた。そこでは、微分作用素を各変数の微分の多項式として書くとき、その多項式を $(g_1, g_2, g_3) \in SL_2 \times SL_2 \times SL_2$ の多項式で、$SL_2 \subset SL_2 \times SL_2 \times SL_2$ (対角埋め込み) で不変で、かつ適当な条件を満たすものの中で考えるという発想によるもので、各 z_{ii} $(i=1,2,3)$ に関するウェイトは $(2+\nu_2+\nu_3, 2+\nu_3+\nu_1, 2+\nu_1+\nu_2)$（ただし ν_i は非負整数）の形になる、またこのときの具体的な微分作用素の形も $X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} X_3^{\nu_3}$ に関する母関数で与えられるというものであった。実は SL_2 の a_i 次の対称テンソル表現 ρ_{a_1}, ρ_{a_2}, ρ_{a_3} のテンソル $\rho_{a_1} \otimes \rho_{a_2} \otimes \rho_{a_3}$ の既約分解が SL_2 の単位表現を含む条件は、ある整数 $\nu_i \geq 0$ があって $a_1 = \nu_2 + \nu_3$, $a_2 = \nu_3 + \nu_1$, $a_3 = \nu_1 + \nu_2$ となることであり、この事実が上のウェイトの条件に反映している。またこのとき、単位表現の重複度は 1 である。

2. 最初の結果

私はしばらく上記の Zagier の結果を眺めてみたのだが、あまり発想が良く理解できなかったので、自分なりに考え直すことにした。(その後、交流を通じて学んだことだが、Zagier の発想というのは、たいていの場合、彼の独創による特殊な感覚で行われており、これを自分流に翻訳しない限り、理解が難しいことが多いという経験を何度かした。)

さて、振り返ってみると、そもそもこのような微分作用素は 3 次ジーゲル保型形式に対するものが初めてというわけではない。Eichler-Zagier のヤコービ形式の本 [3] によれば 1 次のウェイト k インデックス m のヤコービ形式 $\phi(\tau, z)$ に対して、微分作用素 $\mathbb{D}_{\nu,m}$ で $(\mathbb{D}_{\nu,m}\phi)(\tau, 0)$ がウェイト $k+2\nu$ の楕円保型形式になるものが各 ν に対して与えられている。これは見かけ上ヤコービ形式への作用だが、容易にインデックス m によらない 2 次ジーゲル保型形式上の作用素 $\mathbb{D}_\nu$ に置き換えることができ、ウェイト k の 2 次ジーゲル保型形式 F に対し、$(\mathbb{D}_\nu F)\begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ 0 & z_{22} \end{pmatrix}$ は z_{11}, z_{22} について、それぞれウェイトが $k+2\nu$ の保型形式になるようにできる。この $\mathbb{D}_\nu$ は定係数正則斉次線形偏微分作用素であり、従って $\frac{\partial}{\partial z_{ij}}$ $(1 \leq i \leq j \leq 2)$ の斉次多項式と考えることもでき、実はこの多項式は本質的に古典的な Gegenbauer 多項式（の斉次化）になっている。Gegenbauer 多項式は、古典的によく知られているように $SO(d)$ の球表現（つまり $SO(d-1)$ 不変なベクトルを持つ、いわゆるクラス 1 表現）の帯球関数と関係がある (今の場合 $d = 2k$ である。) このあたりを勉強するのに、竹内勝著「現代の球関数」[9] などを眺めた。時

あたかも昭和から平成に移るころで、突然の休日があったりしたので、その間に前述の竹内勝氏の本その他の特殊関数論の本をたくさん集めて眺めていた結果、ようやく、これは球面 S^{d-1} 上の関数とも思えるが、$S^{d-1}\times S^{d-1}$ 上の関数で $SO(d)$ の対角作用で不変な関数とも思えるのだということに気が付いた。あるいは、$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上のそれぞれの成分について調和な多項式で $O(d)$ の対角作用で不変なものと言ってもよい。(こういうことは常識なのだろうし、また私よりも１０年ぐらい先輩の先生方は直接理論が整備されたころに立ち会っていたものと思われ、自然と身に着けておられた内容だと思うのだが、そもそも古典的な球関数論自身をよく知らなかった私にとっては、初めて学んだことが多かった。）となれば、一般は S^{d-1} をたくさんかけて $O(d)$ の対角作用で不変なものを取ればよいのではないかという話になる。元の問題に戻って考えれば、n 次ジーゲル上半空間 H_n 上の正則関数に作用する定数係数線形正則微分作用素 $\mathbb{D}$ は、当然、$n\times n$ の対称行列 T の成分に関する多項式 $P(T)$ と、座標変数 $Z=(z_{ij})\in H_n$ (H_n は n 次ジーゲル上半空間）を用いて

$$\mathbb{D}=P\left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)$$

と書ける。H_n 上の正則関数 F でフーリエ展開 $F(Z)=\sum_T a(T)\exp(Tr(TZ))$ を持つもの（たとえば保型形式）への $\mathbb{D}$ の作用は

$$(\mathbb{D}F)(Z)=\sum_T a(T)P(T)\exp(Tr(TZ))$$

と各係数に $P(T)$ をかけただけの式になる。たとえば元の保型形式が $F(Z)=\sum_{X\in M_{d,n}(\mathbb{Z})}\exp({}^tXXZ)$ の形のテータ関数であるとしよう。(離散群が何かは、とりあえずどうでもよい。）これを上の $\mathbb{D}$ で微分したのち、$Z\in H_n$ を勝手な対角ブロック

$$Z_0=\begin{pmatrix} Z_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & Z_{rr}\end{pmatrix}, \qquad (Z_{ii}\in H_{n_i},\quad \textstyle\sum_{i=1}^r n_i=n),$$

に制限すると、$X=(X_1,\ldots,X_r)$, $X_i\in M_{d,n_i}$ と書くとき

$$(\mathbb{D}F)(Z_0)=\sum_{X=(X_1,\ldots,X_r)\in M_{d,n}(\mathbb{Z})} P\begin{pmatrix} {}^tX_1X_1 & {}^tX_1X_2 & \cdots & {}^tX_1X_r \\ {}^tX_2X_1 & {}^tX_2X_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ {}^tX_rX_1 & \cdots & \cdots & {}^tX_rX_r\end{pmatrix}$$
$$\times\exp(Tr({}^tX_1X_1Z_{11}))\times\cdots\times\exp(Tr({}^tX_rX_rZ_{rr}))$$

となる。Andrianov 等によってよく知られているように、これは $P({}^tXX)$ が各 X_i について pluri-harmonic であるときには、すなわち、$X_i=$

$(x_{\nu j}^{(i)})$ と書くとき、各 $i=1,\ldots,r$ と (j,l) $(1 \le j,l \le n_i)$ について

$$\sum_{\nu=1}^{d} \frac{\partial^2 P}{\partial x_{\nu j}^{(i)} \partial x_{\nu l}^{(i)}} = 0$$

となるときには、各 Z_{ii} について、適当なウェイトのジーゲル保型形式になる。(ウェイトは P の $X_i \to A_i X_i$ $(A_i \in GL_{n_i})$ での振る舞いで決まる。) もちろん、もとの $F(Z)$ がテータ関数でないときにも $\mathbb{D}(F)$ の制限が保型形式になることは、きちんとした証明が必要であり、実際証明できるが、とにかくこの発想によって非常に一般的な形でこの種の微分作用素を定式化できるという事がわかった。実際には、この微分作用素は、元のウェイト k の保型因子による $Sp(n,\mathbb{R})$ の作用と、$Sp(n,\mathbb{R})$ の部分群 $Sp(n_1,\mathbb{R})\times\cdots\times Sp(n_r,\mathbb{R})$ の適当な保型因子で決まる作用とについて交換可能な作用素になっており、つまりは holomorphic discrete series の、部分群の表現への制限の既約分解成分への twisting operator を与えていると言ってもよい。これは純粋に実リー群の話であって、離散群とは何の関係もない。またこれは行き先がベクトル値の保型形式でもよく、また $H_n\times\cdots\times H_n$ を対角に制限するという発想にすれば Rankin-Cohen 型の作用素も全部含んでいるし、ジーゲル保型形式のヒルベルト保型形式への制限、ないしはヒルベルト・ジーゲル保型形式からヒルベルト保型形式の積への制限も含んでいる。このような結果については [4] に発表しているし、通常の方法では構成しにくい保型形式の構成や、ジーゲル保型形式の標準 L 関数の特殊値の計算などに威力を発揮するというように、多数応用がある。(もっと一般化すれば、有界対称領域の組 $\Delta \subset D$ で $Aut(\Delta)$ から $Aut(D)$ への自然な埋め込みが有るものについても、同じ問題を考えることができる。)

さて、以上の理論では、最初の動機の都合上、微分作用素 $\mathbb{D}$ が登場したが、むしろ $\mathbb{D}$ を与える多項式 P の一般論を考えるという立場に立てば、P の特徴づけを書いた時点で $\mathbb{D}$ の話は完全に忘れさることができる。そして、ここに新しい特殊多項式系の理論が登場することになる (たとえば [6] などもそうである)。我々の場合、つまり (最初の $n=3$ の場合より少し一般化して) H_n を対角成分 $H_1\times\cdots\times H_1$ に制限する場合に適用すると次のようになる。

正の整数 d と $n\ge 2$ および非負整数の組 $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ を固定せよ。また x_i $(i=1,\ldots,n)$ を d 次のベクトルとする。このとき、次の x_i の多項式 $\widetilde{P}$ の空間 $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{a}}(d)$ と考察したい。

(1) $\widetilde{P}(c_1x_1,\ldots,c_nx_n)=c_1^{a_1}\cdots c_n^{a_n}\widetilde{P}(x_1,\ldots,x_n)$.

(2) $\widetilde{P}$ は各 x_i それぞれについて調和多項式である。

(3) 任意の $g\in O(d)$ に対して、$\widetilde{P}(gx_1,\ldots,gx_n)=\widetilde{P}(x_1,\ldots,x_n)$ である。

条件 (1) は各変数 x_i について斉次であることを意味している。(ここで $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ を多重次数と呼ぶ。) (1) (2) によれば、そもそもこのような多項式は調和多項式の積の空間に属するが、斉次調和多項式の空間は $SO(d)$ の球表現の表現空間である。また (3) の条件はそのテンソルの中で $O(d)$ の対角作用で不変であることを示している。つ

まりはこのような P の次元を求めたかったら、球表現のテンソルの既約分解での単位表現の重複度を求めればよい。これは古典群の表現論の範疇であり、原理的には次元は指標計算でわかり、また (重複度の closed な公式を書き下すことはともかくとして) 次元のある種の母関数を与えること自身は容易である。(もちろん存在しないこともあり、また一般の n では次元は 1 より大きい。) また古典的な不変式論により、$d \geq n$ ならば、このような多項式は内積 (x_i, x_j) の多項式でもあることもわかる。そこで $d \geq n$ の条件下では $\widetilde{P}(x_1, \ldots, x_n) = P((t_{ij}))$, $t_{ij} = (x_i, x_j)$ となるような多項式 P が一意的に定まる。ここで

$$\mathbb{D} = P\left(\left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right)$$

とおけば、これが求める微分作用素である。もとのジーゲル保型形式のウェイトが k ならば $d = 2k$ ととり、$\mathbb{D}(F)$ を対角行列に制限した時の各対角成分に対するウェイトのなすベクトルは $(k+a_1, k+a_2, \ldots, k+a_n)$ になるのである。

特に $n = 3$ ならば、この重複度は $max_i a_i \leq (a_1 + a_2 + a_3)/2$ ならば 1 でありそうでなければ 0 であることが容易にわかる。よってこの条件を満たす a_i をいろいろ動かして、当該の多項式全体を考えると、各次元が 1 なので、このような多項式全体の母関数が容易にわかりそうなものであるが、しかし、次元が 1 ということは多項式が定数倍を除いて決まるという事であり、一つに決まるという事ではない。よって、この定数を多重次数ごとにどうとるかによって、母関数はどんどん変わるので、どのような定数の取り方を各次数ですれば母関数が綺麗に書けるかというのは、全然自明ではない問題になる。しかしともかく、正しく推量することにより、それまで全く見たこともない綺麗な母関数を一つ求めた。さらに Gegenbauer 微分方程式の時にならって、動径部分をとるなどの操作で Laplacian の条件を非斉次形で書くことにより、3 変数の微分方程式が得られて、これは rank 8 の holonomy 系になる。こういったことは 1990 年ごろには既にわかっていた。

3. 一般論の展開（1）

さて、以上の定式化では d は整数である。しかし、そもそも $\widetilde{P}$ を x_i の言葉で書くよりは、最初から t_{ij} の多項式 $P(T)$ の理論と考える方がすっきりしているとの観点から、理論を書き直すことにした。実際には、x_i に関して調和という条件を、Laplacian の変数変換で t_{ij} に関する微分方程式の条件に置き換えで、x_i は忘れてしまうという方針をとることになった。こうすると d は任意の複素数で良いことになる。まず、$T = {}^tT = (t_{ij}) \in M_n$ (記号上 $t_{ij} = t_{ji}$ としている) について、$\partial_{ij} = \partial_{ji} = (1+\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial t_{ij}}$ とおく。x_i 上の Laplacian を t_{ij} に書き換えると、次を得る。

$$D_{ii} = d\partial_i + \sum_{j,k=1}^{n} t_{jk}\partial_{ij}\partial_{ik}. \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

これから、任意の $d \in \mathbb{C}$ に対して「$\mathbf{a}$ 次の球多項式」$P(T)$ の新しい定義は次で与えられる。

$$\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d) = \{P(T); P(\lambda T \lambda) = \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_n^{a_n} P(T), D_{ii} P(T) = 0\}$$

ここで λ は λ_i を対角成分とする n 次対角行列、P は t_{ij} に関する多項式を動くとしている。以下、球多項式といったら、この空間の元を意味することにする。

さて、論文の第一章はこの空間に対する一般論を展開している。いちいち説明するのは大変なので、要点だけかいつまんで述べる。

(1) よく知られたことだが、普通の斉次多項式からなるベクトル空間は、調和多項式とノルム $x_1^2 + \cdots + x_d^2$ のべきの積の直和で書ける。これと同様のことが $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ を調和多項式の空間のかわりにとれば成り立つ。ここでノルムの積の代わりに t_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ のべきの積をとる。

(2) $\dim \mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ は、非常に例外的な d （非負整数のある集合）を除き、d によらず $\mathbf{a}$ のみによって決まる。このような generic な d に対して、特に $n = 2$ ならば $a_1 = a_2$ の時のみ 1 次元、それ以外は 0 次元である。$n = 3$ ならば、$a_1 = \nu_2 + \nu_3$, $a_2 = \nu_3 + \nu_1$, $a_3 = \nu_1 + \nu_2$ となる非負整数 ν_1, ν_2, ν_3 が存在するときに限り、1 次元、他は 0 次元である。$n \geq 4$ ならば n を固定しても次元は $\mathbf{a}$ につれて増大する。より正確に述べれば、次元 $\dim \mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ は実は次の集合の位数と等しい。

$$\mathcal{N}_0(\mathbf{a}) = \{\nu = (\nu_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0}); \nu_{ij} = \nu_{ji}, \nu_{ii} = 0, \nu \mathbf{1} = \mathbf{a}\}.$$

ここで $\mathbf{1}$ はすべての成分が 1 である n 次縦ベクトルを表す。より正確に言えば、$P(T) \in \mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ からすべての $t_{ii} = 0$ として得られる式への写像が単射なのである。こういった定理は d が大きい正の整数ならば、直交群の表現論に持ち込んで証明することもできる。しかし、一般の d で証明するのは、また話が別である。実際、この論文では古典的な表現論をほとんど使っておらず、全部直接証明している。これは表現論を知らなかったからではなくて、そういう議論とは独立な議論が必要なことが多かったからである。実際、上に述べた定理の直接証明は、なかなか面白いものである。

(3) まず $d > n - 1$ ならば、T の多項式全体に自然な内積を定義することができる。これはもともとの $P(T)$ の出自が球面の積の上の関数であったことを思えば、そこから自然にきまる球面上の積分を T の言葉に置き換えればよいだけである。このとき、$\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ は $\mathbf{a}$ が異なれば、この内積について直交していることもわかる。この内積は、一見計算しにくそうだが、完全に明示的に計算する方法をこの節で説明している。さて、実際には球多項式同士の内積は d の有理関数としてかけるので、$d > n - 1$ という条件は最終的には必要なくなる。実際 d の有理関数体上の代数の内積と思えば、いつでも定義されていることになる。しかし、実際に d を変数と思うと、どこで内積が退化しないかというのは、別の重要な問題になる。この問題の解答は、この章では終

了せずに、第２章に持ち越される。

(4) T の多項式上に作用する自然な偏微分作用素をいくつか定義できる。t_{ij} をかける作用 F_{ij}、混合オイラー作用素 $E_{ij}=\sum_{l=1}^{n} t_{il}\partial_{jl}$, 混合ラプラシアン $D_{ij}=d\partial_{ij}+\sum_{k,l=1}^{n} t_{kl}\partial_{ik}\partial_{jl}$ などである。これらの作用素は、自然に Lie algebra になり、シンプレクティック群のリー環 $sp(n,\mathbb{R})$ と同型になり、あとで重要な役割を果たす。内積に対するこれらの双対写像も求められる。

4. 一般論の展開（２）：２種類の標準基底

さて、前節までの結果は、決して易しい結果というわけではないし、いろいろ面白い点が多いと考えているのだが、それでも、ある意味で、この種の理論の既定路線のようなところがあるので、この意味ではルーティンワークと呼べなくもない。しかし、この節で述べることは、たぶんそういう内容よりは、より創造的である。

まず $n\leq 3$ ならば、$\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ は高々１次元なので、正規化をどうするかという点を除けば、基底は一意的に決まっている。これらは $\mathbf{a}$ を動かすとき、対角成分が１の３次正定値対称行列の空間の新しい直交多項式系を与えている。しかし $n\geq 4$ では次元は一般に１より大きい。空間は $\mathbf{a}$ が異なれば、$\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ はみな直交するのだから、この $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ の中でも適当な直交基底をとれば、理論全体がスッキリするのではないかと思うかもしれないが、実例を計算してみると、直交基底は、どう言う取り方をしても全く美しくは見えない。（ここでは正規化は問題にしておらず、単に直交するようにとったらどうなるかという話をしている。）数学で美しくないものを標準基底というのには無理があるので、こういう発想をあきらめることにする。それではどうするかというと、前節 (2) を見ると $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ の元は、単項式 $\prod_{i>j} t_{ij}^{\nu_{ij}}$ の線形結合と１対１に対応していることがわかる。ということは、$(\nu_{ij})\in\mathcal{N}_0(\mathbf{a})$ をひとつ固定するとき、$t_{ii}=0$ とおけば $\prod_{i<j} t_{ij}^{\nu_{ij}}$ $((\nu_{ij})\mathbf{1}=\mathbf{a})$ となるような $P_\nu^M(T)\in\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ がただ一つ存在し、$\nu\in\mathcal{N}_{\mathbf{0}}(\mathbf{a})$ を動かせばこれらは $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ の基底ということになる。この P_ν^M を「“multi-index” $\nu=(\nu_{ij})$ に対応する」monomial basis 呼ぶことにする。さて、前に述べた定理によると、任意の T の多項式は t_{ii} の積と球多項式の積の直和であるから、それ自身は調和的ではない単項式 $\prod_{i<j} t_{ij}^{\nu_{ij}}$ から球多項式の空間への projection (harmonic projection) がある。この projection は、上述の t_{ii} を含まない単項式の線形結合からの単射だと言っているのである。実はこの projection を本当に具体的な写像として与えることができる。正確に言えば、任意の球多項式 P に対して、$t_{ij}P$ からの projection も記述できる。ということは、$\nu=(\nu_{ij})$ に対する monomial basis がわかれば、$\nu+\mathbf{e}_{ij}$ ($\mathbf{e}_{ij}$ は (i,j) 成分と (j,i) 成分が１でそれ以外がゼロの行列）の monomial basis もわかるということを意味しているのである。それやこれやで、実は P_ν^M は定数関数１から出発して、上の (4) で述べたリー代数の普遍展開環の元を繰り返し作用させることで、具体的に構成されるのである。この多項式の係数は、構成の仕

方から d の有理関数になっており、その極はかなり限定される。このあたりの仕掛けは実は非斉次座標を使うと手品のようにスッキリ理解できる。(これはたとえばルジャンドル多項式のロドリグの公式に感じは少し似ているが、実際にはかなり違う。) さて、以上の定義の仕方には、なんとなく安直な印象もあり、直ちにこれをもって「正しい基底」と考えるのには、どうもいささか抵抗があった。そこで考えたのが次のような別の基底のアイデアである。今、前節の (4) の作用素 D_{ij} を考える。これの出自は、もとの $\mathbb{R}^d$ の変数に戻って考えると $x_i = (x_{i\nu})$, $x_j = (x_{j\nu})$ に対する mixed Laplacian

$$\sum_{\nu=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_{i\nu}\partial x_{j\nu}}$$

を T の変数に焼き直したものである。当然すべての (i,j) について D_{ij} は可換であり、よって $D_i = D_{ii}$ とも可換である。ということは作用素とみるとき、D_{ij} は次数は下げ、調和性を保存することになる。よってこれは $\mathcal{P}_a(d)$ から $\mathcal{P}_{a-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j}(d)$ への写像を与えている。($\mathbf{e}_i$ は i 項が 1 で他が 0 のベクトル)。この写像に対して、うまくふるまう球多項式の系列はないかというのが気になった。そこで、たとえば次数 $a_1+\cdots+a_n$ がより小さいところでは、何らかの意味で multi-index にうまく関連付けられた基底が決まっているとしよう。(空間 $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ はもちろん $\mathbf{a}$ (と d) で決まっているが、一方で multi-index ν で $\nu\mathbf{1} = \mathbf{a}$ なるものというのは、当面は次元をカウントするための便宜的な概念に過ぎず、「これに対応する基底」というのは、まだ定義されていないが、$\mathbf{a}$ が小さいところでは、なんらかの P_ν の定義がすでに与えられているとする。)。このとき、$P \in \mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ ですべての i, j $(1 \le i, j \le n)$ について $D_{ij}P$ が $\nu - \mathbf{e}_{ij}$ に対応する、すでに定義された基底 $P_{\nu-e_{ij}}$ になっているという条件を考える。このような球多項式の系列はあるか? ただし $\nu - e_{ij}$ にマイナスの成分が出てきたら (つまり ν の (i,j) 成分がゼロなら) $P_{\nu-e_{ij}} = 0$ としておく。

実は、このような基底が存在するのである。定数をきちんと決める必要があるので、次数がゼロの時に、定数関数 1 をこの基底の一部と仮定しておくと、定数を込めて、各 multi-index $\nu \in \mathcal{N}_0(\mathbf{a})$ に対するこのような球多項式が、全部一意的に決まる。これを P_ν^D と書いて、descending basis と呼ぶことにする。条件が複雑なので、このようなものが存在するという存在定理の証明は全然易しくはなく、かなり複雑な議論を必要とする。しかし、そればかりではなく、このような基底(の定数倍)の母級数が実際に構成できる。(monomial basis の母級数は、一般には全く分かっていない。) これらは、複雑すぎて第一章の一般論に含めることはできなかったので、第 2 章に証明を書いてある。

さて、実はもっと面白いことには、この一見出自の異なる P_ν^D と P_μ^M は、前に定義した内積に関して、双対基底であることがわかるのである。言い換えると、任意の multi-indices ν, μ に対して

$$(P_\nu^M, P_\mu^D) = \delta_{\nu\mu}.$$

ここに至って、これらの2種類の基底は、実はどちらも十分標準的な「正しい基底」なのだということを確信するに至った。これらの基底の多数の実例は、プレプリントの付録にあるので、ここでは説明しない。なお、この基底に対する内積のグラム行列式などは、$\mathbf{a}$ などが与えられれば、明示的な計算法があるので、この例も多数付録に載せているが、closed な公式が書き下せるわけではないので、その様相はあまり良くわからないところがある。(ちなみに、双対基底であることがわかるのなら、最初から $P_\nu^D(T)$ を $P_\nu^M(T)$ の双対基底と定義してしまえば、定義に苦労しないではないかと思われるかもしれないが、その場合は内積がいつ（どの d に対して）非退化かを事前に知っておかなければならず、これは全然自明ではない。話は実は逆で descending basis の構成的な証明の後に、初めて内積がいつ非退化かを知ることが出来るのである。そしてこの構成自身が P_ν^D の普遍母関数という副産物を生み出す元となった。）

第1章の最後では、d がたとえ正の整数でも n と比べて小さい時には、$\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ と「もともとの $\mathbb{R}^d$ 上の調和多項式の積で $O(d)$ 不変なものの空間」は一般に等しくないので、そのずれがどのように生ずるかについて、いくつかの結果を述べている。

5. 明示的構成。特に $n=3$

第2章はより明示的な構成について述べてある。さて、前に述べたように $n=3$ ならば、$\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ は1次元か0次元であるから、前節で述べた2種類の基底は定数倍を除いては一致する。よって、ある意味で、より canonical な基底があるとも思える。この場合には、かなり具体的な理論が可能になる。この場合 $a_i=\nu_j+\nu_k$ ($\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$) という条件から、次数 $\mathbf{a}$ を与えることと multi-index $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ を与えることは同値である。(前の記号でいえば、$\nu_{23}=\nu_1$, $\nu_{13}=\nu_2$, $\nu_{12}=\nu_3$ である。）以下、$\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ と書く。得られている結果を箇条書きにしてみると、

(1) 綺麗な母関数が書ける。これは他の機会に何度か報告したこともあると思うが、大変綺麗なので、ここにも採録しておく。$r_1=2t_{23}$, $r_2=2t_{13}$, $r_3=2t_{12}$, $m_1=t_{11}$, $m_2=t_{22}$, $m_3=t_{33}$ とおく。また

$$\begin{aligned}\Delta_0(T,X)&=1-\sum_{i=1}^{3}(r_iX_i-m_ir_iX_{i+1}X_{i+2}-m_{i+1}m_{i+2}X_i^2)\\ d(T)&=4\det(T)\\ R(T,X)&=\frac{\Delta_0(X,T)+\sqrt{\Delta_0(T,X)^2-4d(T)X_1X_2X_3}}{2}\end{aligned}$$

とする。このとき、$d\not\in\{2,0,-2,-4,\ldots,\}$ について、

$$\sum_\nu P_\nu(T)X^\nu=\frac{R(T,X)^{-s}}{\sqrt{\Delta_0(T,X)^2-4d(T)X_1X_2X_3}}$$

で $P_\nu(T)$ を定めると、$P_\nu(T)$ は $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ の基底である。ただし $a_1=\nu_2+\nu_3$ (a_2, a_3 もその置換)、$s=(d-4)/2$, $X^\nu=X_1^{\nu_1}X_2^{\nu_2}X_3^{\nu_3}$ としている。なお、ここで $t_{i3}=0$ $(i=1,2,3)$ と置くと（あるいは $X_2=X_3=0$ とおくと)、この母関数は普通の Gegenbauer 多項式の母関数になる。その意味で、古典的な場合の自然な拡張になっている。

(2) $P_\nu(T)$ を $t_{ii}=1$ に制限したものは、対角成分が 1 の 3 次正定値実対称行列上の直交多項式系を与える。また、内積 (P_ν,P_ν) の公式が明示的に書き下せる。前に定義した 2 種類の基底との比例定数も明示的に書ける。逆に言うと、この母関数に現れる $P_\nu(T)$ は monomial basis でも descending basis でもない。

(3) $P_\nu(T)$ の間の 5 種類の recursion formula がある。このうちで実用上もっとも綺麗なのは、古典的なルジャンドル多項式などの漸化式と似たものである。

(4) $P_\nu(T)$ の比較的簡明な多項式の係数の公式が得られる。これは単に母関数を展開して得られる公式よりは、ずっと簡単なものであるが、ここでの組合せ論は、かなり複雑で non-trivial である。

(5) $n=3$ では T の変数のほかに、angular coordinate などほかの変数の取り方の候補もあり、$\det(T)$ が分解する等の面白い性質もある。

以上をまとめれば、$n=3$ の時には、球多項式は、かなりの部分、手に取るようにわかるようになったと言ってもよいであろう。

6. $n\geq 4$、DESCENDING BASIS の存在

$n\geq 4$ の場合について、最初は我々は次のように考えていた。$n=3$ ならば $\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ はせいぜい 1 次元なのだから、この場合は、理論はいろいろな意味で非常に canonical だ。もしかするとこの場合に限り非常に綺麗なことが起きるのかもしれない。もっと大きい n は次元はどんどんあがるから、いろいろ複雑になるはずだし、定義式の微分方程式系も holonomic ではないし、何が起きるのかあまりよくわからない。こういう場合を考える価値があるかどうかよくわからない。要するに n 一般の理論というものに、どうも確信がなかったのである。しかし、論文を書く前にもう少し続けてみようかと、いろいろ monomial とか descending とか、もっともらしい基底を考えているうちに、話はまことに不思議な方向に発展し始めたのである。そしてこの発展こそが、本論文の最終版を書き上げるのが、かくも遅くなった理由であった。

こういう理論の中で、一番面白そうなのは、母関数である。そもそも $n=3$ のときでも、普通の Gegenbauer 多項式の母関数

$$\frac{1}{(1-2t_{12}X+t_{11}t_{22}X^2)^{(d-2)/2}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(t_{12},t_{11}t_{22})X^\nu$$

が自然に拡張できたというのは面白いではないか。こういうことは、もっと大きい n ではないのだろうか？

こういう研究というのは、最後はヤマ勘かもしれないが、何らかの考える手がかりがないと、考えようがない。ところが、すでに存在している $n=2,3$ の母関数をよく見ると、つぎのようなことに気が付く。今、n 次のダミー変数行列 $X=(x_{ij})$ (ただし対角成分はすべて $x_{ii}=0$ とし、対称行列とする）および n 次対称行列 $T=(t_{ij})$ を考える。また、行列の積 TX を考えて、これの固有値の i 次基本対称式 σ_i を考える。たとえば、$n=3$ ならば

$$\begin{aligned}\sigma_1 =& 2(t_{12}x_{12}+t_{13}x_{13}+t_{23}x_{23})\\ \sigma_2 =& (\sigma_1/2)^2-(t_{11}t_{22}x_{12}^2+2t_{11}t_{23}x_{12}x_{13}+t_{11}t_{33}x_{13}^2\\ &+2t_{13}t_{22}x_{12}x_{23}+2t_{12}t_{33}x_{13}x_{23}+t_{22}t_{33}x_{23}^2)\\ \sigma_3 =& 2\det(T)x_{12}x_{23}x_{13}\end{aligned}$$

である。よって実は $n=2$ の古典的な Gegenbauer 多項式（の斉次形）の母関数は、ここで $x_{13}=x_{23}=0$ とするとき、x_{12} をダミー変数として

$$\frac{1}{(1-\sigma_1/2)^2-\sigma_2)^{(d-2)/2}}$$

また $n=3$ の時に新しく得た母関数は、x_{12}, x_{23}, x_{13} をダミー変数として

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_0^2-8\sigma_3}}\left(\frac{\Delta_0+\sqrt{\Delta_0^2-8\sigma_3}}{2}\right)^{-(d-4)/2}$$

ただし、$\Delta_0=(1-\sigma_1/2)^2-\sigma_2$ と書けるのである。(ここで、前に与えた母関数は $x_{12}=X_3$ などと置き換えれば得られる。）ということは、一般の n でも σ_i $(i=1,\ldots,n)$ の多項式を考える意味があるのではないかという事になる。そして、結論から言えば、これが大きな理論の飛躍をもたらした。

さて、σ_i に意味があると思えば、$\mathbb{C}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$ への D_i の作用がどのようになるか調べてみたい気持ちになるのは当然である。こういう計算は、あまり単純な計算とは言えないのだが、何が出てくるのかは実行してみないとわからないし、計算する前に何らかの成算があったわけではない。しかし実際にやってみると、その計算結果は大変面白いものであった。まず多項式環 $\mathbb{C}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$ は D_{ij} の作用で不変ではない。しかし、その作用の像は、この多項式環上のわりと簡単な加群に属していることがわかる。その結果は実に簡明で、任意の $F\in\mathbb{C}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$ と (i,j) $(1\le i,j\le n)$ に対して、

$$D_{ij}(F)=\sum_{p=1}^{n}\partial_{ij}(\sigma_p)\mathcal{L}_p(F)$$

となる。ただし、ここで $\mathcal{L}_p$ は $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ に関する、2 階の線形偏微分作用素で、これは (i,j) にはよらず、各 p のみによって決まり、非常に具体的に公式が書ける作用素になる。つまり D_{ij} の像は、$\mathbb{C}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$

上 $\partial_{ij}(\sigma_p)$ で張られる加群に属しているのである。さて、すぐわかるように

$$\sigma_1 = 2 \sum_{1\le i<j\le n} t_{ij}x_{ij}$$

であるから、$\partial_{ii}(\sigma_1) = 0$ である。しかし、$p \ge 2$ ならば $\partial_{ii}(\sigma_p) \neq 0$ であり、これらが独立だと信じれば、$D_{ii}(F) = 0$ なる条件から $\mathcal{L}_pF = 0$ for $p \ge 2$ となる。これを $D_{ij}(F)$ $(i \neq j)$ に適用すると、

$$D_{ij}(F) = \partial_{ij}(\sigma_1)\mathcal{L}_1(F) = 2x_{ij}\mathcal{L}_1(F).$$

以上は単なる計算結果であるが、これの意味するところは、すこぶる面白い。まず、$D_{ii}(F) = 0$ という調和多項式の条件が $\mathcal{L}_p(F) = 0$ $(p \ge 2)$ という条件に置き換えられている。ここで条件に $p = 1$ は含んでいないところがみそである。ちなみに調和性の条件というのは、F はそもそも T と X の多項式であり、D_{ij} は T に関する微分作用素であって、X とは何の関係もないから、$D_{ii}(F) = 0$ というのは、各ダミー変数 x_{ij} の単項式の係数がすべて調和多項式という意味である。次に F の $X^\nu = \prod_{i<j} x_{ij}^{\nu_{ij}}$ の係数が D_{ij} により、定数倍を除き $\mathcal{L}_1(F)$ の $X^{\nu-\mathbf{e}_{ij}} = x_{ij}^{\nu_{ij}-1}\prod_{k<l,(k,l)\neq(i,j)} X_{kl}^{\nu_{kl}}$ の係数に写っている。これらは、何か descending basis が一斉にうまく与えられるのではないかという期待を抱かせるのに十分な結果である。実際には、次のようになる。今 σ_p を p 次として、$C[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$ の graded ring と思うことにし、V_k で k 次の部分ベクトル空間を表す。また、$Ker(\mathcal{L}_p)$ で $\mathbb{C}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n]$ の元で $\mathcal{L}_p$ で消えるもの全体を表し、$W = \cap_{p=2}^n Ker(\mathcal{L}_p)$ をおく。すると $\mathcal{L}_p$ どうしの交換関係などの公式を証明することにより、次が証明できる。

各 $k \ge 0$ に対して、$W_k := W \cap V_k$ は一次元である。G_k を W_k のゼロでない元とすると $\mathcal{L}_1(G_k)$ は G_{k-1} のゼロでない定数倍である。また $G = \sum_{k=0}^\infty G_k$ とおき、$\nu \in \mathcal{N}_0 = \cup_{\mathbf{a}}\mathcal{N}_0(\mathbf{a})$ に対して P_ν を $G = \sum_\nu P_\nu X^\nu$ と定義すると、$D_{ij}P_\nu$ は $P_{\nu-\mathbf{e}_{ij}}$ のゼロでない定数倍である。

この定理は、あきらかに descending basis の存在を主張するものである。証明はかなり複雑であるが、そのひとつのポイントは、交換子 $[\mathcal{L}_p.\mathcal{L}_q]$ の計算にある。

7. Universal generating functions

実は、前節の考察は、ある意味で n に無関係な universal な母関数とでもいうべきものを導く。具体的に言えば、たとえば $n = 2$ ならば

$$\mathcal{L}_2 = (d-1)\frac{\partial}{\partial\sigma_2} + 2\sigma_2\frac{\partial^2}{\partial\sigma_2^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial\sigma_1^2}$$

である。ここで無限級数

$$G^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) = \sum_{r=0}^\infty g_r^{(2)}(\sigma_1)\frac{\sigma_2^r}{r!}$$

に対して、$\mathcal{L}_2(G^{(2)})=0$ という条件を課すと、

$$\frac{d-1+2r}{2}\,g^{(2)}_{r+1}(\sigma_1)=\frac{\partial^2 g^{(2)}_r}{\partial\sigma_1^2}(\sigma_1)$$

となる。つまり（d が非常に特殊な場合を除けば）各 $g^{(2)}_r$ は $g^{(2)}_0$ から一意的に決まる。ここで $g^{(2)}_0(\sigma_1)$ はどう決めればよいかというと、$\mathcal{L}_2(G^{(2)})=0$ という条件には何の役割もはたしていないので、どう決めてもよいのである。（もちろん、最終的な $G^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2)$ の各単項式の係数が消えない程度には一般的にとってもく必要はあるが。）ここで $g^{(2)}_0(\sigma_1)$ を $G^{(1)}(\sigma_1)$ と書くことにして

$$G^{(1)}(\sigma_1)=(1-\sigma_1/2)^{2-d}$$

というのを標準的な選択だを思うことにすると、

$$G^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2)=((1-\sigma_1/2))^2-\sigma_2)^{-(d-2)/2}$$

となることが容易にわかる。これは普通の Gegenbauer 多項式の母関数である。さて、n が一般でも実は同様の考察を進めることができるという点が非常に面白い。たとえば、次の $n=3$ では、上で得られた $G^{(2)}$ を $g^{(3)}_0(\sigma_1,\sigma_2)$ として、

$$G^{(3)}(\sigma 1,\sigma_2,\sigma_3)=\sum_{r=0}^{\infty}g^{(3)}_r(\sigma_1,\sigma_2)\frac{\sigma_3^r}{r!}$$

に $\mathcal{L}_3(G^{(3)})=0$ という条件を課すと、$g^{(3)}_r$ と $g^{(3)}_{r+1}$ の関係がわかって、すべては $g^{(3)}_0=G^{(2)}$ から、ひいては $G^{(1)}$ の選択から、決まっていることになるのである。ちなみに前に述べた $G^{(1)}$ の標準的な選択に対してこのようにして得られた $G^{(3)}$ が、前に解説した $n=3$ の母関数にぴったり一致している。

$\mathcal{L}_n$ において、σ_n に関係するところと σ_i $(i<n)$ に関係するところを分けて書くというようなことを試みると、上のような漸化式が芋づる式に得られることになって、一般の n に関する（というよりも本当は n 自身 universal と思えるような）descending basis の一般的な母関数がえらえる。もはや紙数もつきようとしているので、詳しくは述べられないが、作用素 $\mathcal{M}_n$ を

$$\mathcal{M}_n=\sum_{\substack{0<a,b<n\\ a+b\geq n}}\sigma_{a+b-n}\partial_a\partial_b$$

と定義する。σ_n をかける操作と $\mathcal{M}_n$ は可換であることに注意する。級数 $\mathbb{J}(x)$ (ベッセル関数) を

$$\mathbb{J}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!(\nu+1)_r},$$

ただし $(\nu+1)_r=(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+r)$ と定義するとき

$$G^{(n)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=\mathbb{J}_{\frac{d-n-1}{2}}(\sigma_n\mathcal{M}_n)\mathbb{J}_{\frac{d-n}{2}}(\sigma_{n-1}\mathcal{M}_{n-1})\cdots\mathbb{J}_{\frac{d-3}{2}}(\sigma_2\mathcal{M}_2)(G^{(1)}(\sigma_1))$$

となる。これは n が小さいところの母関数から、n が大きいところの母関数を次々と得ていくというプロセスになっているのである。

8. 母関数の代数性

さて、前節で説明した母級数は、いつ代数関数になるのだろうか。ここで代数的というのは、いわば言葉のあやで、いつ綺麗に書けるかと言い換えてもよい。たとえば $n=2$ のときでも、d が一般の複素数ならば複素べき $(1-2t_{12}X+t_{11}t_{22}X^2)^{(d-2)/2}$ は代数関数とは言えない。だから、$n=2,3$ の場合は代数的というのは正確に言えば正しくはない。しかし代数関数であることを要請すれば、そのような場合には綺麗に書けるのだろうとは思える。

最初は $n \geq 4$ ならば、我々の標準母級数は、どれも代数的ではないのかと思っていた。ところが、$n=4$ の時には次の事実が判明した。

(1) $d=4$ ならば、標準母級数自身が代数的である。母関数は、比較的綺麗に書きくだせる。(詳しくは論文参照。)

(2) $d \geq 6$ が偶数とすると、標準母関数自身は代数関数ではないが、各 multi-index に対応する基底の適当な (multi-index による) 定数倍に取り直すと、代数的な母関数が得られる。これらはすべて、$\mathbb{C}[\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4]$ 上の共通の 4 次体に属する。

(3) これ以外の場合はよくわからない。たとえば $d=5$ だと代数的な母関数はないかもしれないと思われる。

証明は非常にややこしいが、実験とその理論への反映などが交差して、なかなかスリルに富んでいる。最後に 4 次方程式のフェラーリの公式も出てきたりする。興味のある方は論文を参照されたい。

9. 応用と今後の問題

われわれの理論は、それ自身の独自の面白さから研究してきたものである。しかし $n=3$ の場合には、triple L function の特殊値などへの非常にはっきりした応用がある ([2], [7], [1])。$n>3$ の時には、何らかの保型形式的な応用があるのかどうか、はっきりしていないし、pullback formula などはあまりうまくいかないというのが定説かもしれない (Boecherer and Heim の研究など)。しかし各多重次数（ないしはウェイトの増分）ではなくて、各 multi-index ごとに標準的な多項式（というか微分作用素）があるという観点は新しいはずであり、応用について、今一度新鮮な観点で考え直してみる必要があると思う。また算術交点理論などについては、$n=3$ のときでも、まだあまりはっきりしていないと思う。そういうことに応用するには、われわれの理論はまだ十分ではないような気がする。よくわからないのだが、いい加減な感想を述べると、Green 関数などに応用するためには、たぶん次数の $\mathbf{a}$ ないしは multi-index の ν を複素数とみなして連続的に動かす理論を述べる必要があるのだと思う。これは定義だけなら、微分方程

式の係数を複素化すればよいだけだから、できるのだが、具体的な意味のある理論になるかどうかが問題であろう。

まあしかし、われわれの共同研究の第一部はこれで完了ということにしている。第2部は Higher Spherical Functions という題名で、radial part の微分方程式系に関する非多項式解の研究をすることになっている。$n=3$ だと、$\mathcal{P}_{\mathbf{a}}(d)$ を定義する方程式系の非斉次版は holonomic of rank 8 になり、いわば第2種ルジャンドル関数などのような理論があるはずである。非多項式解について、すでにわかっていることがいくつもある。しかし n を一般にすると、定義方程式系だけだと holonomic にならないと思うので、何を考えるのが標準的か、少しはっきりしない点があるが、いくつか候補はある。今後どの程度、このような理論の研究を続けることになるのか、よくわからないが、いずれ第2部の論文を書かねばならないと言う点では、共著者と同意しているので、健康なうちに第2部も投稿できるとよいがと考えている。

References

[1] S. Boecherer, P. Sarnak, R. Schulze-Pillot, Arithmetic and equidistribution of measures on the sphere, Comm. Math. Phys. **242/1-2**(2003), 67–80.

[2] S. Boecherer, T. Satoh, T. Yamazaki, On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series. Comment. Math. Univ. St. Paul. **41** (1992), no. 1, 1–22.

[3] M. Eichler and D. Zagier, The theory of Jacobi forms, Progress in Mathematics, **55** Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. v+148.

[4] T. Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials, Comment. Math. Univ. St. Pauli **48** (1999), 103–118.

[5] T. Ibukiyama(Editor), Differential Operators on Modular Forms and Application, Proceedings of the 7-th Autumn Workshop on Number Theory, Ryushi-do (2005), 176+vi pages.

[6] T. Ibukiyama, T. Kuzumaki and H. Ochiai, Holonomic systems of Gegenbauer type polynomials of matrix arguments related with Siegel modular forms, J. Math. Soc. Japan **64** No.1(2012), 273-316.

[7] T. Ibukiyama, H. Katsurada, C. Poor and D. Yuen, Congruences to Ikeda-Miyawaki lift and triple L-values of elliptic modular forms, J. Number Theory **134** (2014), 142–180.

[8] T. Ibukiyama and D. Zagier, Higher Spherical Polynomials, Max Planck Institute for Mathematics, Preprint MPIM14-41 (Year 2014 Number 41), pp. 97. http://www.mpim-bonn.mpg.de/preprints

[9] 竹内勝「現代の球関数」(数学選書) 岩波書店 (1975) pp. 291.

Tomoyoshi Ibukiyama
Professor Emeritus (大阪大学名誉教授)
Department of Mathematics, Graduate School of Science
Osaka University
Machikaneyama 1-1, Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan
ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp